
Stirlingscher Kreisprozess

Von:
Fabian Kraus
Simon Fischer

Betreuung:
M. Elsenheimer

10. Dezember 2021

Inhalt

1	Versuchsbeschreibung	1
2	Physikalische Grundlagen	1
2.1	Thermodynamik	1
2.2	Joule-Thomson-Effekt	2
2.3	Stirling-Kreisprozess	2
3	Versuchsdurchführung	3
4	Ergebnisse & Auswertung	4
4.1	Reibungswärme	4
4.2	Kraft-Wärme-Maschine	4
4.3	Wärme-Kraft-Maschine	5
4.4	Fazit	6

1 Versuchsbeschreibung

In diesem Versuch werden die entsprechenden Leistungszahlen und die Effizienzen eines Stirlingmotors als Wärme-Kraft-Maschine und als Kraft-Wärme-Maschine experimentell bestimmt.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Thermodynamik

Für das Verständnis des Versuches sind einige Begriffe aus der Thermodynamik nötig:

- Die *ideale Gasgleichung* verbindet Druck p und Temperatur T miteinander:

$$pV = nR_{gas}T \quad (1)$$

mit der Stoffmenge n in Mol und der Gaskonstante $R_{gas} \approx 8.314 \frac{J}{mol \cdot K}$.

- Die *innere Energie* eines idealen Gases mit f Freiheitsgraden ist proportional zur Temperatur des Gases:

$$U = nR_{gas}T \frac{f}{2} \quad (2)$$

- Der *erste Hauptsatz* der Thermodynamik besagt, dass die innere Energie eines abgeschlossenen Systems konstant bleibt und sich nur durch den Transport von Wärme Q oder der Verrichtung von Arbeit W ändern kann

$$dU = dW + dQ \quad (3)$$

- Ein *Wärmereservoir* bzw. *Kältereservoir* ist eine idealerweise unendlich große Stoffmenge einer festen Temperatur, die somit unendlich viel Wärme abgeben bzw. aufnehmen kann, ohne dass sich diese Temperatur ändert.

- Der *Wirkungsgrad* η einer Wärme-Kraft-Maschine ist das Verhältnis von erzeugter, nutzbarer Kraft und verbrauchter Wärme:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q} \quad (4)$$

Der Wirkungsgrad einer Wärme-Kraft-Maschine ist nach oben begrenzt durch den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses $\eta_C = \frac{T_H - T_K}{T_H}$, wobei T_H/K die heißeste/kälteste Temperatur ist.

Einen Stirlingmotor kann man auch zu einer Kraft-Wärme-Maschine umfunktionieren, indem man das Schwungrad von außen bewegt. Dadurch führt man dem System mechanische Energie zu, und der Motor wird zu einer Kältemaschine bzw. Wärmepumpe.

- Die *Leistungszahl* ε ist hier das Verhältnis von abtransportierter bzw. zugeführter Wärme zur aufgewendeten Leistung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \quad (5)$$

- Die *Jahres-Arbeits-Zahl-Zahl* (JAZZ) ist das Verhältnis der über ein ganzes Jahr abgegebenen Wärme zur aufgenommenen elektrischen Energie; diese wird nicht im Labor gemessen sondern unter Realbedingungen.

2.2 Joule-Thomson-Effekt

Der *Joule-Thomson-Effekt* bezeichnet eine Temperaturänderung, die in einem Gas auftritt, wenn es von einem Volumen V_1 mit Druck p_1 in ein Volumen V_2 mit Druck p_2 strömt. Bei manchen Gasen erhöht sich die Temperatur (z.B. H_2 , He, Ne), bei manchen sinkt die Temperatur (z.B. Luft); der Prozess ist irreversibel. Die Energiebilanz (3) ist hier:

$$U_2 = U_1 + p_1 V_1 - p_2 V_2$$

Definiert man nun die *Enthalpie* $H = U + pV$, so hat man $H_1 = H_2$; solche Prozesse nennt man *isenthalp*.

Bei realen Gasen hängt die Enthalpie von Temperatur und Volumen ab; da die Enthalpie insgesamt konstant bleibt, sich das Volumen aber ändert, muss sich die Temperatur auch ändern. Die Stärke und die Richtung dieser Temperaturänderung wird mit dem Joule-Thomson-Koeffizienten μ beschrieben:

$$\mu = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_H$$

2.3 Stirling-Kreisprozess

Der *Stirling-Kreisprozess* lässt sich am besten veranschaulichen durch ein pV-Diagramm:

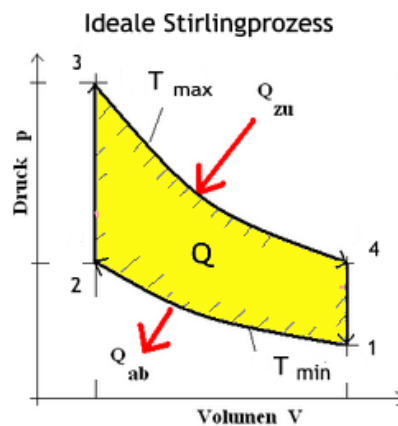


Abbildung 1: pV-Diagramm des Stirling-Kreisprozesses (Quelle: Wikipedia)

Starten wir bei Punkt 3 und gehen zu Punkt 4, so führt das System zunächst eine isotherme ($T = \text{const.}$) Zustandsänderung durch, bei der auch die innere Energie konstant bleibt. Das Gas verrichtet hier Arbeit, da es den Kolben von sich wegdrückt, also muss es Energie in Form von Wärme Q_{34} aufnehmen.

Die Arbeit, die es dabei verrichtet ist gegeben durch

$$Q_{34} = -W_{34} = \int_{V_3}^{V_4} dV p = \int_{V_3}^{V_4} dV \frac{n R_{\text{gas}} T_H}{V} = n R_{\text{gas}} T_H \log \frac{V_3}{V_4}$$

Von Punkt 4 zu 1 findet eine isochore ($dV = 0$) Zustandsänderung statt, es wird keine Arbeit verrichtet. Hier schiebt der Verdrängerkolben das Gas von der heißen zur kalten Seite des Motors, wobei das Gas Wärme an den Regenerator abgibt, der diese für den Schritt von 2 zu 3 speichert. Die Menge der Energie ist

$$Q_{41} = n C_V (T_K - T_H) < 0$$

Von 1 nach 2 findet wieder ein isothermer Prozess statt, der Arbeitskolben komprimiert das Gas und verrichtet somit Arbeit; wegen $V_1 = V_4$ und $V_2 = V_3$ haben wir wie oben

$$-Q_{12} = W_{12} = n R_{\text{gas}} T_K \log \frac{V_3}{V_4}$$

Den Kreis schließt der Schritt von 2 zu 3, hier nimmt das Gas isochor die im Regenerator gespeicherte Wärme wieder auf; im Idealfall vollständig, in der Realität nicht vollständig. Wir haben also im Idealfall

$$Q_{23} = -Q_{41} = nC_V(T_K - T_H)$$

Kombinieren wir alles, können wir den Wirkungsgrad berechnen:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{|W_{34}| - |W_{12}|}{|Q_{34}|} \\ &= \frac{nR_{gas}T_H \log \frac{V_3}{V_4} - nR_{gas}T_K \log \frac{V_3}{V_4}}{nR_{gas}T_K \log \frac{V_3}{V_4}} \\ &= \frac{T_H - T_K}{T_H} \\ &\equiv \eta_C\end{aligned}$$

Der ideale Wirkungsgrad erreicht also das Maximum: Den Carnot-Wirkungsgrad.

Der Stirling-Prozess ist umkehrbar; das entspricht der Änderung der Umlaufrichtung durch das Diagramm.

3 Versuchsdurchführung

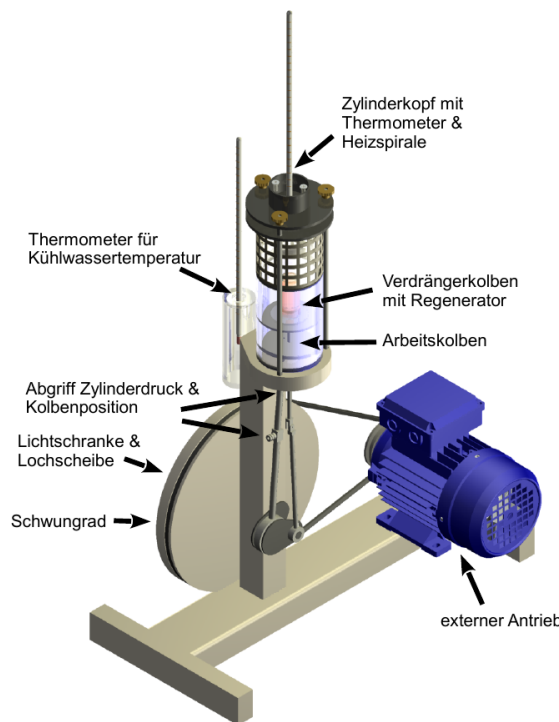


Abbildung 2: Aufbau eines Leybold Heißluftmotors (Aus der Anleitung)

Der Versuch besteht aus drei Teilen:

1. Zu Beginn des Versuches wird der Riemen für den externen Betrieb an Schwungrad und Antrieb befestigt. Durch Starten der Pumpe wird Wasser in den Kühlbehälter des Heißluftmotors geführt. Die Temperatur des Kühlwassers wird im ausgeschaltetem Zustand im Gleichgewicht notiert. Durch die Bewegung des Motors erwärmt sich das Kühlwasser, sobald die Temperatur des Kühlwassers für mehrere Minuten stabilisiert ist wird über ein Messbecher das abgeführte Wasser während einer gewisse Dauer aufgefangen und notiert. Die Drehzahl des Motors wird

ebenfalls gemessen. Aus den ermittelten Werten kann man den Verlust an Reibungswärme berechnen.

2. Nun wird an den Zylinderkopf eine Heizspirale mit Thermometer angebracht. Aus Strom und Spannung kann man daraus die Heizleistung ermitteln, die die Kälteleistung des Stirlingmotors ausgleichen soll, da dieser sonst gefrieren kann; die Leistung des antreibenden Elektromotors wird direkt an der Steckdose über ein Messgerät bestimmt.

Die Messung beginnt nach dem Start des Motors. Gemessen wird für fünf verschiedene Temperaturen der Heizspirale die Temperatur der Heizspirale, die Temperatur des Kühlwasser und die zugeführte elektrische Energie.

Die Messwerte werden notiert, sofern das Gleichgewicht erreicht ist; Hierfür müssen die Temperaturen für 5-6 Minuten recht konstant sein.

3. Letztlich wird der externe Antrieb abmontiert. Der Zylinderkopfdeckel wird erneut getauscht. Der Zylinderkopf wird beheizt, sodass der Stirlingmotor eigenständig arbeitet. Wie zuvor wird die Heizspannung und der dazugehörige Strom gemessen, mithilfe eines Lasers wird das pV-Diagramm aufgezeichnet.

4 Ergebnisse & Auswertung

4.1 Reibungswärme

Die Reibungswärme pro Periode ist gegeben durch

$$Q_R = c_v \Delta T \frac{dm}{dt} \frac{1}{f}$$

Hierbei ist $c_v \approx 4190 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ die spezifische Wärmekapazität von Wasser, $\Delta T \approx 0.4\text{K}$ die Temperaturänderung, $\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \cdot 7.17 \cdot 10^{-3} \text{l/s}$ der Massenfluss mit der Dichte von Wasser $\rho \approx 0.997 \frac{\text{kg}}{\text{l}}$ und $f \approx 6.05$ die Frequenz des Kreisprozesses. Setzt man alle Werte ein, so erhält man $Q_R = 1.97\text{J}$. Die Volumenflussmessung hatte einen statistischen Fehler von $\Delta \frac{dV}{dt} = 0.11 \text{ml/s}$ und für das Ablesen des Thermometers kann man einen systematischen Fehler von 0.1K annehmen; damit ist der Fehler der Reibungswärme nach Gauß $\Delta Q_R = 0.53\text{J}$, also fast ein Viertel so groß wie der Messwert selbst. Die Messung war also nicht sehr genau.

4.2 Kraft-Wärme-Maschine

Der Motor wurde auf eine Leistung von ungefähr $P_{el} \approx 86\text{W}$ eingestellt, die Frequenz betrug hier $f = 3.55\text{Hz}$. Es wird angenommen, die durch Reibung verlorene Energie ist nach wie vor $Q_R = 1.97\text{J}$. Es wurden folgende Werte aufgezeichnet, wobei $W_{heiz} = I \cdot U / f$ und $Q_{wasser} = c_v \Delta T \frac{dm}{dt} / f$:

	I [A]	U [V]	$T_{kühl}[C]$	$T_{zk}[C]$	$W_{heiz}[J]$	$Q_{wasser}[J]$
1	0.25	2.535	23.7	-4.5	0.178	7.616
2	0.51	4.87	23.8	-2.0	0.700	8.463
3	0.82	7.69	23.75	4.0	1.776	8.039
4	1.085	10.1	23.75	5.0	3.086	8.039
5	1.3	12.03	23.8	12.0	4.405	8.463

Tabelle 1: Messungen Kraft-Wärme-Maschine

Daraus kann man nun die folgenden Größen der Wärmepumpe berechnen:

1. Die **äußere Leistungszahl** $\varepsilon_{w,ext} = \frac{Q_{wasser} f}{P_{el}}$

2. Die **innere Leistungszahl** $\varepsilon_{w,int} = \frac{Q_{wasser}-Q_{reib}}{Q_{wasser}-Q_{reib}-W_{heiz}}$

Sowie die folgenden Größen der Kältemaschine:

1. Die **äußere Leistungszahl** $\varepsilon_{k,ext} = \frac{W_{heiz}f}{P_{el}}$

2. Die **innere Leistungszahl** $\varepsilon_{k,int} = \frac{W_{heiz}}{Q_{wasser}-Q_{reib}}$

3. Den **Wirkungsgrad** $\eta = \frac{(Q_{wasser}-W_{heiz})f}{P_{el}}$

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	$\varepsilon_{w,ext}$	$\varepsilon_{w,int}$	$\varepsilon_{k,ext}$	$\varepsilon_{k,int}$	η
1	0.314	1.033	0.007	0.032	0.307
2	0.349	1.121	0.029	0.108	0.320
3	0.332	1.414	0.073	0.292	0.259
4	0.332	2.037	0.127	0.509	0.204
5	0.349	3.115	0.182	0.679	0.167

Tabelle 2: Ergebnisse Kraft-Wärme-Maschine

Trägt man $\varepsilon_{k,ext}$ und $\varepsilon_{k,int}$ gegen die Temperatur auf und extrapoliert den Verlauf linear, so erhält man einen Schnittpunkt bei $T = -5.14^\circ\text{C}$:

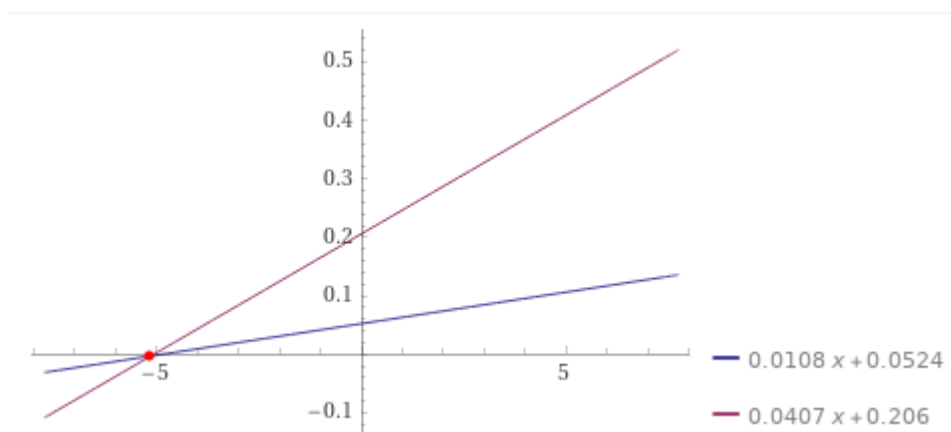


Abbildung 3: Lineare Fortsetzungen von $\varepsilon_{k,ext}$ (blau) und $\varepsilon_{k,int}$ (rot)

Wir haben also mit $T = -4.5^\circ\text{C}$ bei der ersten Messung das Minimum schon fast erreicht.

4.3 Wärme-Kraft-Maschine

Hier wurden mit $U = 12.33\text{V}$, $I = 13.06\text{A}$, $T = 25^\circ\text{C}$ und $f = 3.6\text{Hz}$ folgendes pV -Diagramm aufgezeichnet:

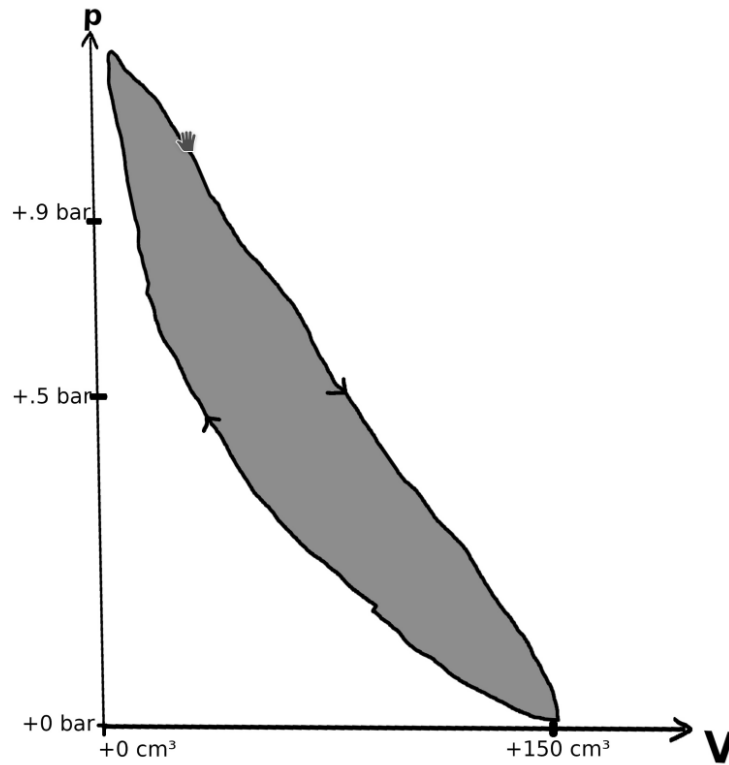


Abbildung 4: pV -Diagramm

Die Fläche in dem Diagramm beträgt $610,157px$ (Pixel), der aufgetragenen Skalierung kann man ebenso entnehmen, dass $1,311 \cdot 508px \hat{=} 150\text{cm}^3 \cdot 0.4\text{bar}$, damit ist die Fläche im pV -Diagramm, die der Nutzarbeit entspricht, gleich

$$W_{\text{nutz}} \approx 5.5\text{J}$$

Damit folgt für den elektrischen Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{el}} = f \frac{W_{\text{nutz}} - Q_{\text{reib}}}{P_{\text{heiz}}} = 0.079$$

Der thermische Wirkungsgrad ist gegeben durch

$$\eta_{\text{th}} = \frac{W_{\text{nutz}} - Q_{\text{reib}}}{Q_{\text{wasser}} + W_{\text{nutz}} - Q_{\text{reib}}} = 0.161$$

Im idealisierten Fall (keine Reibung) wäre der Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{id}} = \frac{W_{\text{nutz}}}{Q_{\text{wasser}} + W_{\text{nutz}}} = 0.230$$

Für das gegebene Bild aus der Anleitung ist $T_H = 535.2\text{K}$; damit folgt der maximal mögliche Carnot-Wirkungsgrad:

$$\eta_C = 0.447$$

4.4 Fazit

Das Experiment eignet sich gut, um die Kenngrößen des Motors näherungsweise zu bestimmen. Man sieht, dass die Wirkungsgrade sehr niedrig sind, der Stirlingmotor also viel Leistung durch Reibung etc. verliert. Die Apparatur zum Aufnehmen eines pV -Diagramms ist sehr raffiniert, trotzdem sieht das Diagramm nicht sehr ähnlich zur Theorie aus.